傅里叶级数，希尔伯特空间

1 希尔伯特空间

希尔伯特空间是欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 在无穷维的推广。一个希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 首先要是一个线性空间，其次它要有内积结构：

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

内积运算需要满足双线性性:

$$\langle au_1 + bv_1, cu_2 + dv_2 \rangle = ac\langle u_1, u_2 \rangle + ad\langle u_1, v_2 \rangle + bc\langle v_1, u_2 \rangle + bd\langle v_1, v_2 \rangle \tag{2}$$

根据内积可以定义希尔伯特空间中向量的模（长度），也称之为范数：

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \tag{3}$$

也可以定义两个向量$u, v \in \mathcal{H}$ 的夹角：

$$\theta_{u,v} = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \in [0, \pi] \tag{4}$$

1.1 无限维情形下的基和线性展开

对于有限维线性空间V, 其中的任意一个向量$v \in V$ 可以写成基向量的线性组合：

$$v = a_1 e_1 + ... + a_n e_n \tag{5}$$

对于希尔伯特空间$\mathcal{H}$ ，$\{e_1, ..., e_n, ...\}$ 称为$\mathcal{H}$ 的一组单位正交基，如果$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, 且对任意的$u \in \mathcal{H}$，都存在实数$a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} |u - (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)| = 0. \tag{6}$$

此时可以写为：

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_i e_i \tag{7}$$

- 如果$u = \sum_k a_k e_k$, $v = \sum_k b_j e_k$, 则$\langle u, v \rangle = \sum_k a_k b_k$

作业**1.1.** 假设$\{e_1, ...\}$ 是希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 的一组基，$u, v \in \mathcal{H}$ 分别有线性展开$u = \sum_k a_k e_k, v = \sum_k b_k e_k$。用实数$a_1, b_1, ...$ 表达$\|u\|$ 和$\theta_{u,v}$.

2 傅里叶级数

假设$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个平方可积的可测函数（在地球物理里面几乎所有直接观测到的函数都是这种函数）。令

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \tag{9}$$

2.1 傅里叶级数的平方平均收敛性

(Parseval 定理)

- $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\right|^2 dx = 0 \tag{10}$$

- $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n^2 + b_n^2) \tag{11}$$

2.2 傅里叶级数的逐点收敛性

问题：是否对任意的$x \in [0, 2\pi]$, 都有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \ ? \tag{12}$$

定理**2.1.** 对于$x_0 \in [0, 2\pi]$, 如果存在$\delta > 0$ 和$M > 0$, 使得对任意的$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，都有$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n\cos(nx_0) + b_n\sin(nx_0)) = f(x_0) \tag{13}$$

作业**2.1.** 对于定义在$[0,2\pi]$ 的函数$f(x)=x$，

（1）求其傅里叶系数a_n, b_n 的值;

（2）分别直接计算$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ 和$a_0^2/2+\sum_k(a_k^2+b_k^2)$，从而证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{14}$$

（3）$f(x)$ 的傅里叶级数在$x=0,\pi,2\pi$ 处分别是否收敛?

3 从希尔伯特空间的角度看傅里叶级数

闭区间$[a,b]$ 上所有平方可积的可测函数构成的集合可以看成一个希尔伯特空间$\mathcal{H}$。

- 首先这是一个线性空间，如果$f,g\in\mathcal{H}$，则$af+bg\in\mathcal{H}$;
- $\mathcal{H}$ 上的内积定义为:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{15}$$

系数$\frac{1}{b-a}$ 是为了使常数函数$f(x)=1$ 的模等于1。

对于$[a,b]=[0,2\pi]$，直接计算可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2nx+1}{2}dx=\frac{1}{2} \tag{16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2} \tag{17}$$

令

$$e_0=1 \tag{18}$$

$$e_{2k+1}=\sqrt{2}\cos kx \tag{19}$$

$$e_{2k+2}=\sqrt{2}\sin kx \tag{20}$$

那么$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$。而对任意的$f\in\mathcal{H}$，令

$$c_0=\langle f,e_0\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2} \tag{21}$$

$$c_k=\langle f,e_{2k+1}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sqrt{2}\cos kxdx=\frac{1}{\sqrt{2}}a_k \tag{22}$$

$$d_k=\langle f,e_{2k+2}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sqrt{2}\sin kxdx=\frac{1}{\sqrt{2}}b_k \tag{23}$$

3.1 Parseval 定理$\Longleftrightarrow$ $\{e_1, e_2, ...\}$ 是$\mathcal{H}$ 的一组单位正交基

根据Parseval 定理，

$$2\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = a_0^2/2 + \sum_k^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \tag{24}$$

$$= 2c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(2c_k^2 + 2d_k^2) \tag{25}$$

因此

$$\|f\|^2 = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2 + d_k^2) \tag{26}$$

相应的，在范数的意义下（不是逐点收敛）

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k\sqrt{2}\cos kx + d_k\sqrt{2}\sin kx) \tag{27}$$

因此在希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 中，

$$f = c_0 e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e_{2k+1} + d_k e_{2k+2}) \tag{28}$$

- 结论：傅里叶展开其实是平方可积函数在三角函数构成的单位正交基下的线性展开。

作业**3.1.** 设$\mathcal{H} = \{f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}, f$平方可积且$f$ 可测$\}$。定义其内积:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)g(x)dx. \tag{29}$$

找到其一组单位正交基。

作业**3.2.** 设$\mathcal{H} = \{f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, f$平方可积且$f$ 可测$\}$。定义其内积:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)g(x, y)dxdy. \tag{30}$$

找到其一组单位正交基。